

*Università degli Studi “G. d’Annunzio” di Chieti – Pescara*



## **INTRODUZIONE AGLI ELEMENTI FINITI**

---

***Quaderno 2 - Basi di elasticità***

Guido Camata, [g.camata@unich.it](mailto:g.camata@unich.it)

*2008-2009*



# Operazioni matriciali

---

- **Moltiplicazione di una matrice per uno scalare:**

$$[a] = k [c] \quad a_{ij} = k c_{ij}$$

- **Addizione di matrici.** Le matrici devono essere dello stesso ordine ( $m \times n$ )

Sommare termine a termine

$$[c] = [a] + [b] \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$



# Operazioni matriciali

---

- **Moltiplicazione di due matrici**

Se  $[a]$  è  $m \times n$  allora  $[b]$  deve avere  $n$  righe

$$[c] = [a] [b]$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$



# Operazioni matriciali

---

- **Trasposta di una matrice:**

Scambio di righe e colonne

$$\boxed{[a_{ij}] = [a_{ji}]^T}$$

Se  $[a]$  è  $m \times n$  allora  $[a]^T$  è  $n \times m$

- Se  $[a] = [a]^T$  allora  $[a]$  è **simmetrica**.  
 $[a]$  deve essere una matrice quadrata



# Operazioni matriciali

---

- **La matrice identità** (o matrice unità) è indicata col simbolo  $[I]$ :

$$[a][I] = [I][a] = [a]$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Operazioni matriciali

---

- L'inversa di una matrice è tale che:

$$[a][a]^{-1} = [I]$$



# Operazioni matriciali

- Differenziazione di una matrice:

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{a}] = \left[ \frac{da_{ij}}{dx} \right]$$



# Operazioni matriciali

- Differenziazione di una matrice:

$$U = \frac{1}{2} [\mathbf{x} \quad \mathbf{y}] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix}$$



# Operazioni matriciali

---

- Integrazione di una matrice.

$$\int [\mathbf{a}] d\mathbf{x} = \left[ \int \mathbf{a}_{ij} d\mathbf{x} \right]$$



## Basi di elasticità

---

Comportamento del materiale  
lineare, omogeneo, isotropico.



# Outline

---

- Tensioni
- Deformazioni
- Relazioni costitutive



# Tensione in un punto

---

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \sigma_{ij} \text{ dove } \begin{cases} i \text{ indica il piano} \\ j \text{ indica la direzione} \end{cases}$$

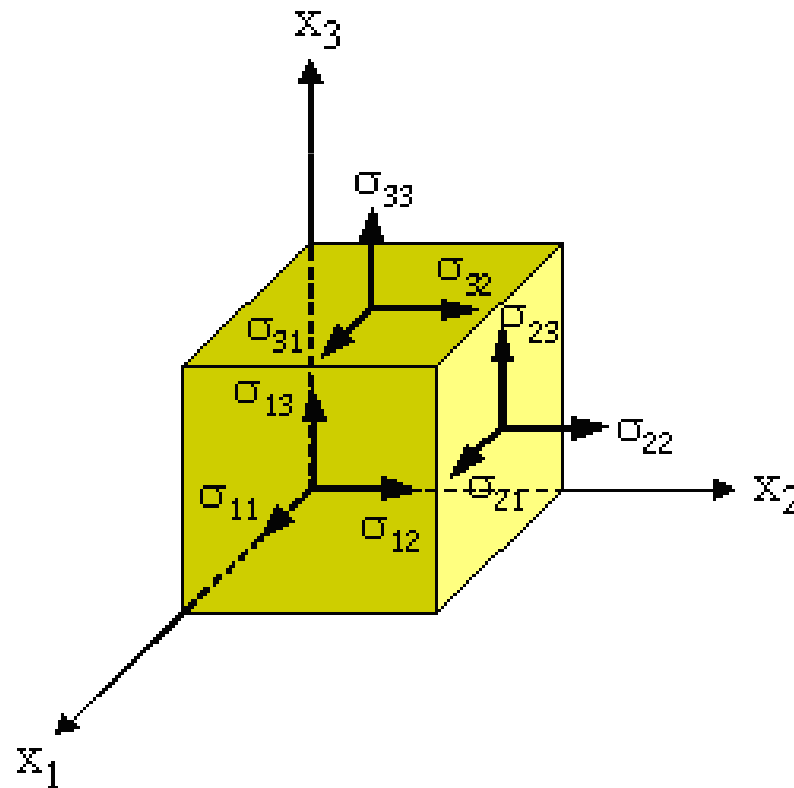
# Tensione in un punto

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Notazione  
tensoriale

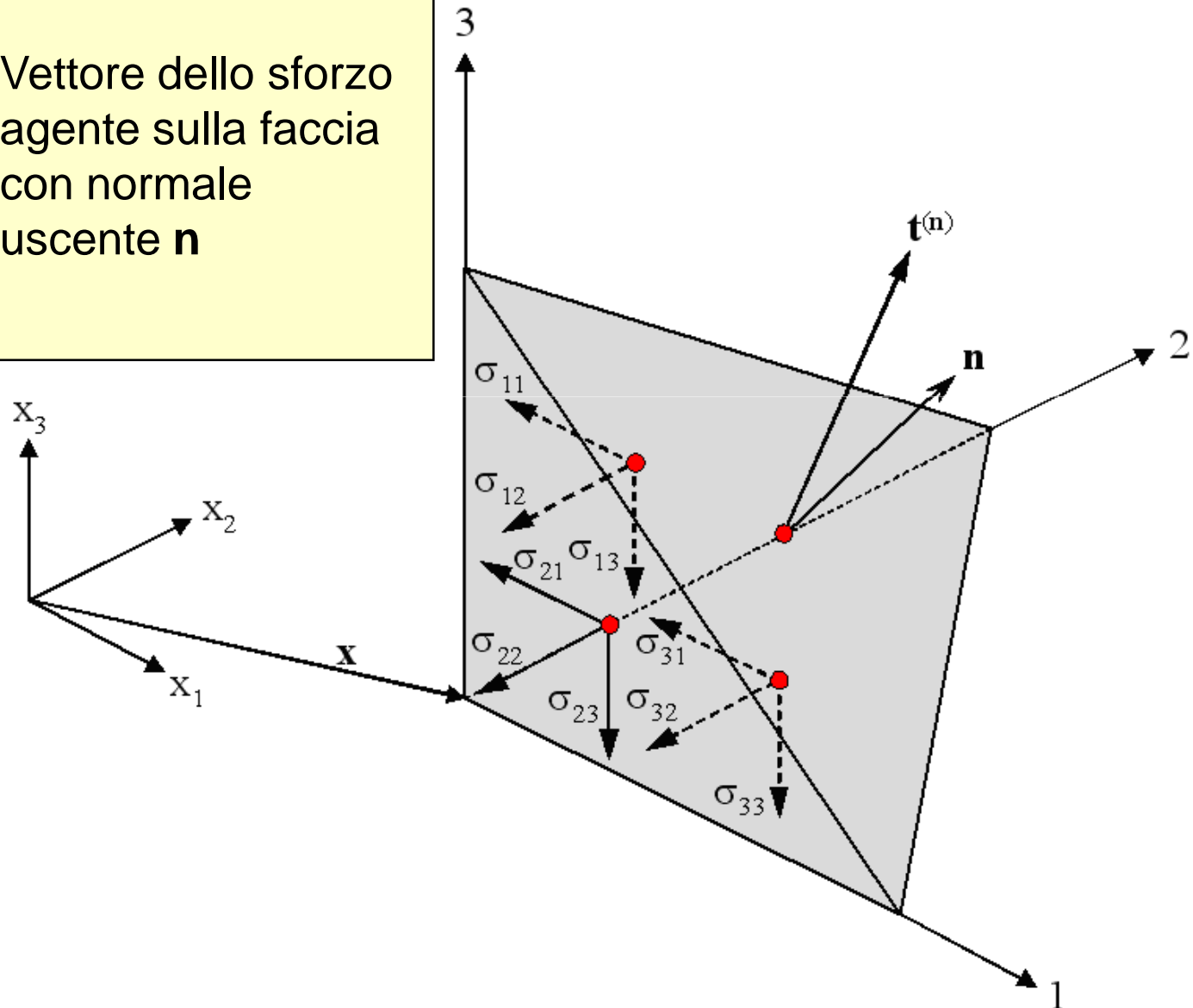
$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}$$

Notazione  
vettoriale



# Componenti dello sforzo

$$\mathbf{t}^{(n)} = \begin{Bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad \text{Vettore dello sforzo agente sulla faccia con normale uscente } \mathbf{n}$$





# Componenti dello sforzo

---

$$\mathbf{t}^{(e_1)} = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{t}^{(e_2)} = \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{t}^{(e_3)} = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{array} \right\}$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  indicano le  
basi dei vettori  
associati agli assi  
globali  $x_1, x_2, x_3$

# Componenti dello sforzo

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(n)} &= n_1 \mathbf{t}^{(e_1)} + n_2 \mathbf{t}^{(e_2)} + n_3 \mathbf{t}^{(e_3)} \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{t}^{(e_1)} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{t}^{(e_2)} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{t}^{(e_3)} \\ &= (n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}) \mathbf{e}_1 + (n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32}) \mathbf{e}_2 + (n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33}) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Notazione matriciale

$$\mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^T \times \mathbf{n}$$

Notazione tensoriale

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\sigma}$$

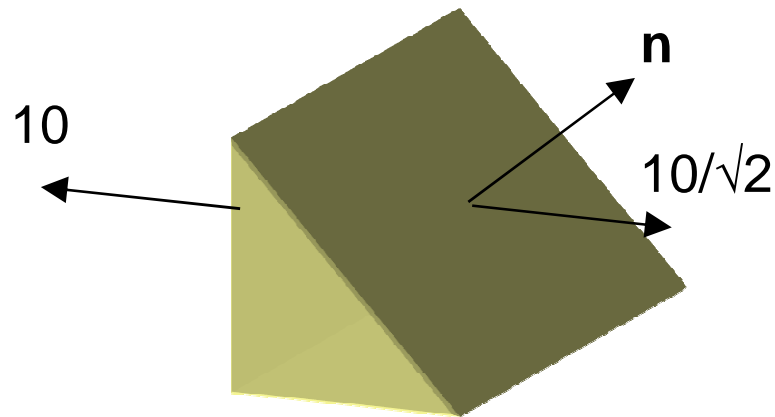
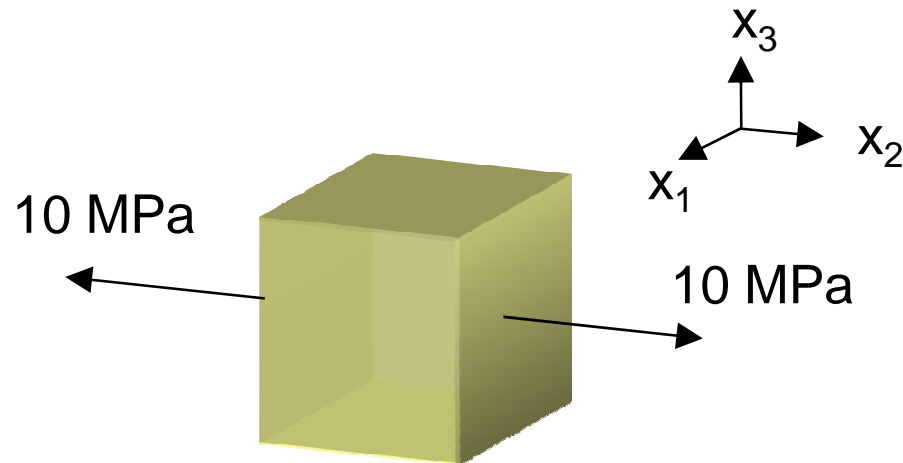
$$t_i = n_j \sigma_{ji}$$

Notazione indiciale

$$t_i = \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji}$$

# Componenti dello sforzo

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$



# Equazioni di equilibrio

Le condizioni di equilibrio devono essere rispettate all'interno dell'elemento infinitesimo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_{x_1} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_{x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_{x_3} &= 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

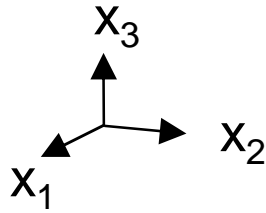


# Outline

---

- Tensioni
- **Deformazioni**
- Relazioni costitutive

# Deformazioni



r

Deformata



Indeformata

Lo spostamento mette in relazione il cambiamento di geometria dalla configurazione originale a quella deformata

# Deformazioni

Le componenti del tensore di deformazione sono così definite:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 u_{k,i} u_{k,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j}\end{aligned}$$

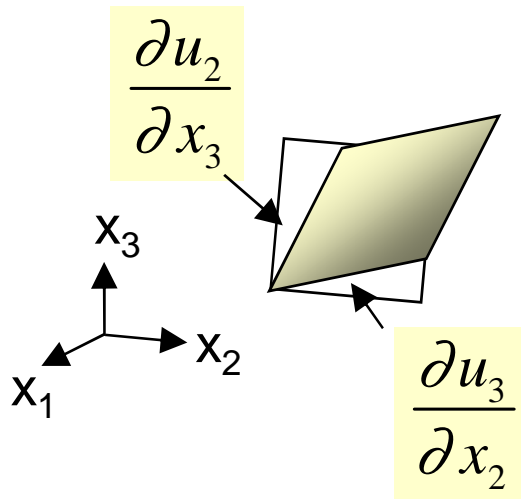
Tensore di  
deformazione di  
Cauchy (tensore  
lineare)

Tensore di deformazione di Green-Lagrange

$$\varepsilon = \varepsilon^I + \varepsilon^{II}$$

# Deformazioni

Le componenti del tensore di deformazione sono così definite:

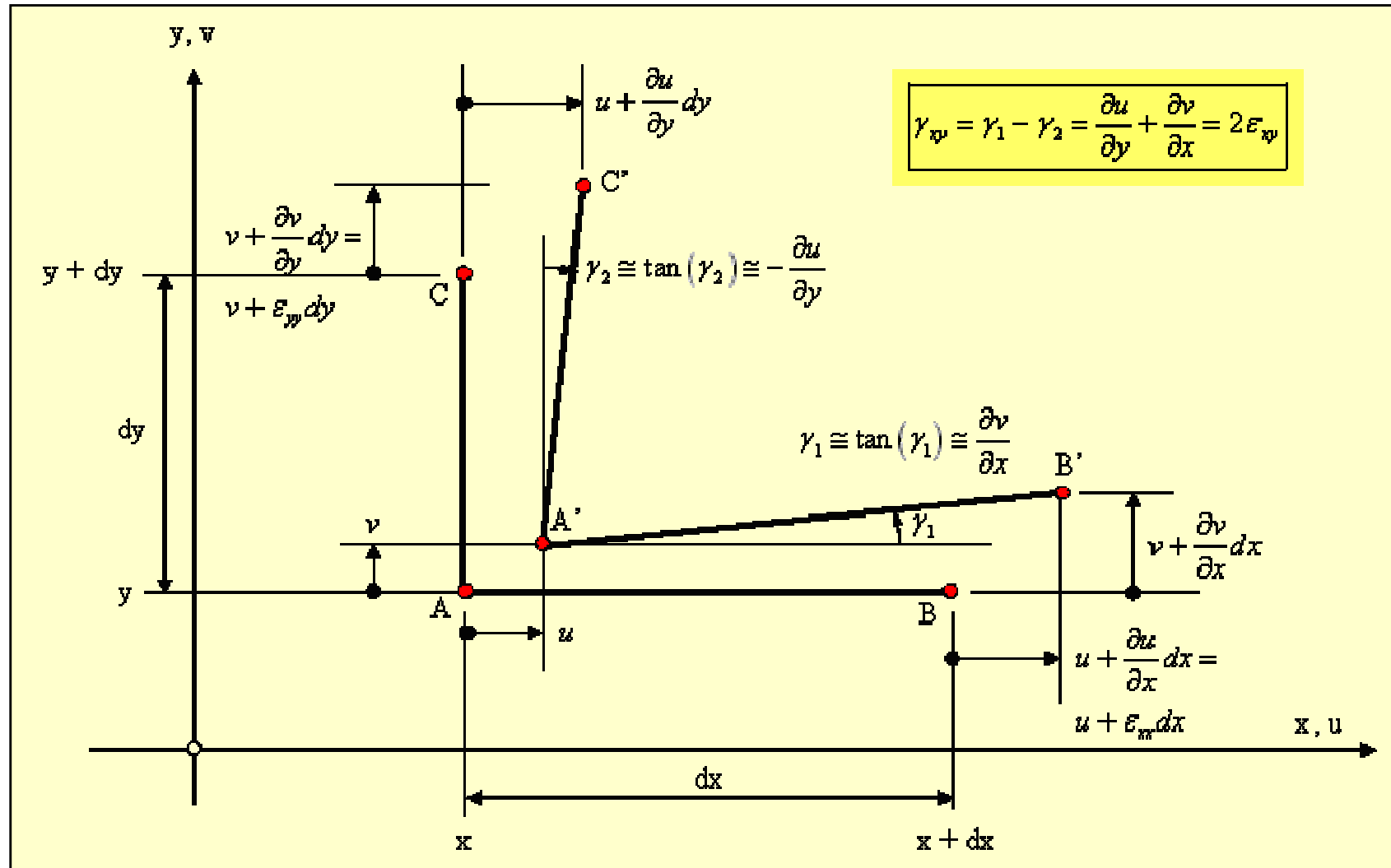


$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$$

Scorrimento angolare

La deformazione rappresenta il cambiamento in lunghezza rispetto alla dimensione originale

# Deformazioni



# Deformazioni

## Deformazioni finite

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}^{II}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right\}$$

## Deformazioni piccole

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^I$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$



# Deformazioni

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

# Deformazioni

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial_z \\ 0 & \partial/\partial_z & \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_z & 0 & \partial/\partial_x \\ \partial/\partial_y & \partial/\partial_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

6 componenti di deformazione e 3 di spostamento → non c'è un'unica soluzione per lo spostamento  $\mathbf{u}$ . Servono delle condizioni aggiuntive

# Deformazioni

$$\begin{bmatrix}
 0 & \partial_z^2 & \partial_y^2 & -\partial_y \partial_z & 0 & 0 \\
 \partial_z^2 & 0 & \partial_x^2 & 0 & -\partial_x \partial_z & 0 \\
 \partial_y^2 & \partial_x^2 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x \partial_y \\
 0 & 0 & -\partial_x \partial_y & \frac{1}{2} \partial_z \partial_x & \frac{1}{2} \partial_y \partial_z & -\frac{1}{2} \partial_z^2 \\
 0 & -\partial_x \partial_z & 0 & \frac{1}{2} \partial_x \partial_y & -\frac{1}{2} \partial_y^2 & \frac{1}{2} \partial_y \partial_z \\
 -\partial_y \partial_z & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \partial_x^2 & \frac{1}{2} \partial_x \partial_y & \frac{1}{2} \partial_x \partial_z
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \varepsilon_{xx} \\
 \varepsilon_{yy} \\
 \varepsilon_{zz} \\
 \gamma_{yz} \\
 \gamma_{xz} \\
 \gamma_{xy}
 \end{Bmatrix}
 = \mathbf{0}$$


 Equazioni di compatibilità



# Outline

---

- Tensioni
- Deformazioni
- Relazioni costitutive

# Leggi costitutive - Leggi Hooke 3D

## Matrice di rigidità del materiale

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

*Simmetrica*

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\sigma = \mathbf{E} \varepsilon$$

$$\text{Det}[\mathbf{E}] > 0$$

$$0 < \nu < 0.5$$

Deve essere sempre definito positivo poiché l'energia specifica di deformazione deve essere sempre positiva.



# Enrgia di deformazione

Ogni corpo elastico possiede un'unica energia specifica di deformazione:

$$U_0 = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}_{ij} d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} E_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

L'energia di deformazione si ottiene integrando l'energia specifica di deformazione :

$$U = \int_{\Omega} U_0 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\Omega$$

$\mathbf{E}$  è definito positivo se:

$n \times n$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{E} \mathbf{v} > 0$$

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

$n \times 1$

# Legge deformazioni – tensioni 3D

## Matrice di flessibilità del materiale

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

*Simmetrica*

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}$$

# Legge costitutive con condizioni iniziali

$$\sigma = \mathbf{E}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$$

Tensioni iniziali

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_0$$

Deformazioni  
meccaniche

Deformazioni iniziali non meccaniche (es.  
effetti della temperatura, deviazioni della  
geometria dell'elemento)



# Sommario

---

Equilibrio	Congruenza	Legge costitutiva
$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}$	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$

# Diagramma di Tonti

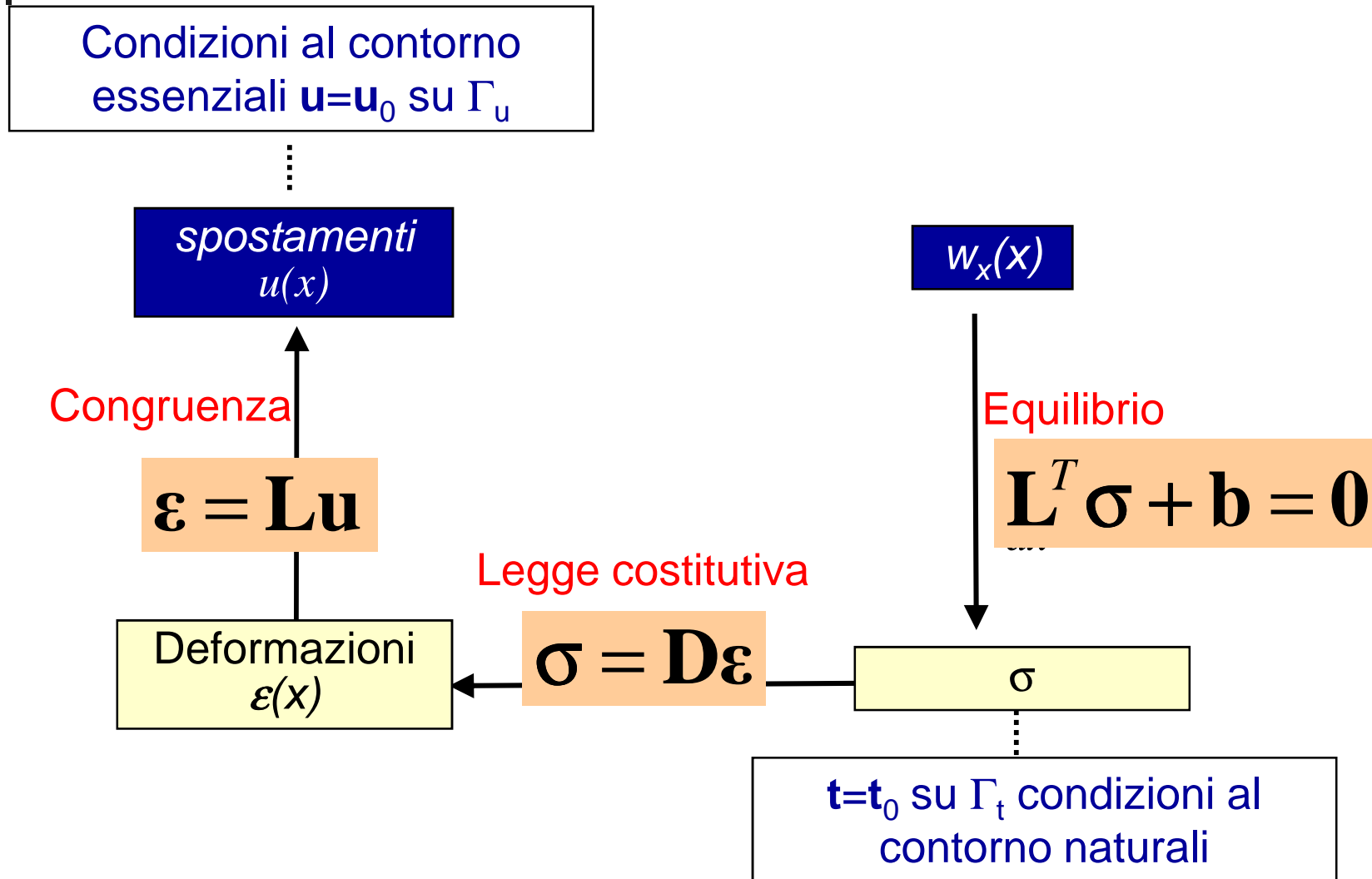


Diagramma di Tonti: [www.dic.univ.trieste.it/perspage/tonti](http://www.dic.univ.trieste.it/perspage/tonti)